BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

НЕПРЕРЫВНОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСХОДЯЩИМСЯ ПОТЕНЦИАЛОМ

Аг.Х.ХАНМАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет

Рассматривается дискретный оператор Шредингера, имеющий расходящийся потенциал. Доказывается непрерывность коэффициента отражения этого оператора.

Хорошо известно применение метода обратной задачи рассеяния к исследованию задач Коши для некоторых нелинейных эволюционных уравнений (см. [1-3] и литературу в них). Как следует из [1,3], обоснование этого метода тесно связано со свойствами непрерывности коэффициента отражения соответствующего вспомогательного линейного оператора.

В работе [4] изучалась обратная задача рассеяния для дискретного оператора L Шредингера , порожденного в $l^2(-\infty,\infty)$ разностным выражением

$$(ly)_n = a_{n-1}y_{n-1} + a_n y_{n+1},$$

причем коэффициент $a_n > 0$ удовлетворяет условию $M_1 < \infty$, где

$$M_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^r \{|a_{2n} - A_0| + |a_{2n+1} - A_1|\}, \ A_0 > 0, \ A_1 > 0, \ r = 1,2,\dots .$$

Настоящая работа посвящена изучению непрерывности коэффициента отражения этого оператора. Подобная задача рассматривалась для одномерного оператора Шредингера в работе [5]. Отметим, что рассмотренный нами оператор L при $A_0 = A_1$ использовался в работе [2], как начальные данные для цепочки Вольтерра. Для определенности, примем, что $A_1 \geq A_0$.

1. **Предварительные сведения**. Обозначим через Γ комплексную λ-плоскость с разрезами по отрезкам $[-(A_1 + A_0), -(A_1 - A_0)]$ и $[A_1 - A_0, A_1 + A_0]$. В плоскости Γ рассмотрим функцию

$$z = z(\lambda) = \frac{\lambda^2 - A_0^2 - A_1^2}{2A_0 A_1} + \sqrt{\left(\frac{\lambda^2 - A_0^2 - A_1^2}{2A_0 A_1}\right)^2 - 1} \ ,$$

где регулярная ветвь радикала выбирается из условия $\sqrt{\left(\frac{\lambda^2 - A_0^2 - A_1^2}{2A_0 A_1}\right)^2} < 0$ при $\lambda > A_1 + A_0$. Как показано в [6], при условии $M_1 < \infty$ уравнение

$$(ly)_n = \lambda y_n, \ \lambda \in C, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1}$$

имеет решения $f_n^{\pm}(\lambda)$, представимые в виде

$$f_{2n+j-1}^{\pm}(\lambda) = \alpha_j^{\pm}(n)\left(\frac{A_0 + A_1 z^{\pm 1}}{\lambda}\right)^{j-1} z^{\pm n}\left(1 + \sum_{m=\pm 1}^{\pm\infty} K_j^{\pm}(n,m) z^{\pm m}\right), \ j = 1,2 \, , \tag{2}$$

при этом величины $K_j^{\pm}(n,m)$, $j = 1,2$ удовлетворяют оценкам

$$\left|K_j^{\pm}(n,m)\right| \le C^{\pm}(n) \sum_{l=n+\left[\frac{m}{2}\right]\pm 1}^{\pm\infty} \left\{\left|a_{2l} - A_0\right| + \left|a_{2l+1} - A_1\right|\right\}, \tag{3}$$

где $\pm C^{\pm}(n)$ -невозрастающая функция от $n, [x]$ -целая часть x. Эти решения связаны при $\lambda \in \partial\Gamma \setminus \left\{\lambda : \lambda^2 = (A_1 \pm A_0)^2\right\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} f_n^-(\lambda) &= A(\lambda)\overline{f_n^+(\lambda)} + B(\lambda) f_n^+(\lambda), \\ f_n^+(\lambda) &= A(\lambda)\overline{f_n^-(\lambda)} - \overline{B(\lambda)} f_n^-(\lambda), \end{aligned} \tag{4}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Для коэффициентов $A(\lambda), B(\lambda)$ справедливы [4] формулы

$$A(\lambda) = \frac{\lambda W\left[f_0^+(\lambda), f_0^-(\lambda)\right]}{A_0 A_1\left(z^{-1} - z\right)}, \quad B(\lambda) = \frac{\lambda W\left[\overline{f_0^+(\lambda)}, f_0^-(\lambda)\right]}{A_0 A_1\left(z - z^{-1}\right)}, \tag{5}$$

где $W\left[f_n^+, f_n^-\right] = a_n\left\{f_n^+ f_{n+1}^- - f_{n+1}^+ f_n^-\right\}$ - вронскиан решений f_n^+ и f_n^-. Из формул (2), (5) следует, что коэффициенты $A(\lambda), B(\lambda)$ могут быть рассмотрены как функции $a(z), b(z)$ от переменного z, причем

$$a(z(\lambda)) = A(\lambda), \ b(z(\lambda)) = B(\lambda). \tag{6}$$

Согласно (2)-(6) функции $a(z), b(z)$ непрерывны на единичной окружности при $z \ne \pm 1$ и имеет место тождество

$$|a(z)|^2 - |b(z)|^2 = 1 \, . \tag{7}$$

Функцию $r(z)=\dfrac{b(z)}{a(z)}$ назовем правым коэффициентом отражения. Из (2)-(7) вытекает, что функция $r(z)$ непрерывна на единичной окружности, за исключением быть может точек $z=\pm 1$. С другой стороны, из тех же формул следует, что если $\lim\limits_{z\to\pm 1}\left(z-z^{-1}\right)a(z)\neq 0$, то функция $r(z)$ непрерывна также при $z=\pm 1$ и $r(\pm 1)=-1$.Покажем, что она непрерывна при $z=\pm 1$ во всех случаях. Для этого будем использовать основные уравнения (см. [4])

$$F_j^{\pm}(2n+m)+K_j^{\pm}(n,m)+\sum_{l=\pm 1}K_j^{\pm}(n,l)F_j^{\pm}(2n+m+l)=0,\ \pm m\geq 1,\ j=1,2\,, \qquad (8)$$

где величины $F_j^{\pm}(2n+m)$, которые полностью определяются данными рассеяния, удовлетворяют условиям.

$$\begin{aligned} &F_j^{\pm}(n)\in l^1(0,\pm\infty),\ j=1,2,\\ &n\left|F_1^{\pm}(n+2p)-F_2^{\pm}(n)\right|\in l^1(0,\pm\infty),\ \ p=0,1. \end{aligned} \qquad (9)$$

2. Непрерывность коэффициента отражения.

Теорема. Если выполняется условие $M_1<\infty$, то функция $r(z)$ непрерывна при $z=\pm 1$

Доказательство. Для простоты все рассуждения приведем для точки $z=1$. Чтобы доказать непрерывность функции $r(z)$ в точке $z=1$, достаточно рассмотреть случай $\lim\limits_{z\to 1}\left(z-z^{-1}\right)a(z)=0$, т.е. случай, когда $\left.\left\{\lambda f_1^{-}(\lambda)f_0^{+}(\lambda)-\lambda f_1^{+}(\lambda)f_0^{-}(\lambda)\right\}\right|_{z=1}=0$. Здесь возможны два случая:

а) $\left.f_0^{+}(\lambda)\right|_{z=1}=\left.f_0^{-}(\lambda)\right|_{z=1}=0$,

б) существует вещественное число q_0, такое, что

$$\left.\lambda f_1^{\pm}(\lambda)\right|_{z=1}=\left.q_0 f_0^{\pm}(\lambda)\right|_{z=1}.$$

Пусть имеет место случай б). Рассмотрим уравнения (8). В силу нашего предположения, верно равенство

$$1+\sum_{m=\pm 1}^{\pm\infty}K_1^{\pm}(0,m)=q\left\{1+\sum_{m=\pm 1}^{\pm\infty}K_2^{\pm}(0,m)\right\},\ q=\frac{(A_0+A_1)\alpha_2^{\pm}(0)}{q_0\alpha_1^{\pm}(0)}\ . \qquad (10)$$

Полагая в уравнениях (8) $n=0$ и суммируя по m в пределах от s до $\pm\infty$, получаем

$$\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}K_j^{\pm}(0,m)\right\}\sum_{m=s}^{\pm\infty}F_j^{\pm}(m)+\varphi_j^{\pm}(s)-\sum_{l=\pm1}^{\pm\infty}F_j^{\pm}(s+l\mp1)\varphi_j^{\pm}(s)=0,\ j=1,2,\quad(11)$$

где $\varphi_j^{\pm}(s)=\sum\limits_{m=s}^{\pm\infty}K_j^{\pm}(0,m)$. Полагая $\varphi^{\pm}(s)=\varphi_1^{\pm}(s)-q\varphi_2^{\pm}(s)$ из последних равенств, с учетом (10), получаем

$$\left\{1+\sum_{m=\pm1}^{\pm\infty}K_1^{\pm}(0,m)\right\}\sum_{m=s}^{\pm\infty}\left\{F_1^{\pm}(m)-F_2^{\pm}(m)\right\}+\varphi^{\pm}(s)-\sum_{l=\pm1}^{\pm\infty}F_1^{\pm}(s+l\mp1)\varphi^{\pm}(l)=$$

$$=q\sum_{l=\pm1}^{\pm\infty}\left\{F_1^{\pm}(s+l\mp1)-F_2^{\pm}(s+l\mp1)\right\}\varphi_2^{\pm}(l)\ .$$

Обозначим

$$g_{\pm}^{(T)}(s)=\sum_{l=\pm1}^{\pm T\mp1}F_1^{\pm}(s+l\mp1)\varphi^{\pm}(l)+\left\{1+\sum_{m=\pm1}^{\pm\infty}K_1^{\pm}(0,m)\right\}\sum_{m=s}^{\pm\infty}\left\{F_2^{\pm}(m)-F_1^{\pm}(m)\right\}+$$

$$+q\sum_{l=\pm1}^{\pm\infty}\left\{F_1^{\pm}(s+l\mp1)-F_2^{\pm}(s+l\mp1)\right\}\varphi_2^{\pm}(l),$$

где $T-$натуральное число, такое, что

$$\sum_{s=\pm T}^{\pm\infty}\left|F_1^{\pm}(s)\right|<1\,.\qquad(12)$$

Тогда из последнего уравнения имеем

$$\varphi^{\pm}(s)-\sum_{l=\pm T}^{\pm\infty}F_1^{\pm}(s+l\pm1)\varphi^{\pm}(l)=g_{\pm}^{(T)}(s)\ .\qquad(13)$$

Согласно условиям (12) операторы, порожденные левыми частями уравнений (13), имеют ограниченные обратные в $l^1(\pm T,\pm\infty)$ соответственно. Пользуясь соотношениями (3), (9) находим, что $g_{\pm}^{(T)}(s)\in l^1(\pm T,\pm\infty)$. Тогда из (13) следует, что $\varphi^{\pm}(s)\in l^1(\pm T,\pm\infty)$. Так как T конечное число, то $\varphi^{\pm}(s)\in l^1(0,\pm\infty)$. Учитывая теперь условие (10), легко убедиться, что

$$\begin{aligned}\lambda f_1^{\pm}(\lambda)&=A_0\alpha_2^{\pm}(0)\left(z^{\pm1}-1\right)\left\{1+\sum_{m=\pm1}^{\pm\infty}K_2^{\pm}(0,m)z^{\pm m}\right\}+\\&+q_0\alpha_1^{\pm}(0)(z-1)\sum_{m=\pm1}^{\pm\infty}\varphi^{\pm}(m)z^{\pm m-1}+q_0f_0^{\pm}(\lambda).\end{aligned}\qquad(14)$$

Тогда подставляя в формулах (5) вместо функций $\lambda f_1^{\pm}(\lambda)$ их выражения (14), получаем, что функции $a(z),b(z)$ непрерывны при $z=1$ и $a(1),b(1)$-

вещественны. Поэтому, в силу формулы (7), $|a(1)| \geq 1 + |b(1)|$. Следовательно, функция $r(z)$ непрерывна в точке $z = 1$ и $-1 < r(1) < 1$.

Рассмотрим теперь случай а). Тогда из уравнения (11), в силу (3), следует, что $\varphi_1^{\pm}(s)$ являются ограниченными решениями уравнений

$$\varphi_1^{\pm}(s) - \sum_{l=\pm 1}^{\pm\infty} F_1^{\pm}(s + l \mp 1)\varphi_1^{\pm}(s) = 0.$$

Тогда, как и в случае б) находим, что $\varphi_1^{\pm}(s) \in l^1(0, \pm\infty)$. Поэтому используя условия а) имеем

$$f_0^{\pm}(\lambda) = \alpha_1^{\pm}(0)(z-1)\sum_{m=\pm 1}^{\pm\infty} \varphi_1^{\pm}(m) z^{\pm m - 1}.$$

Рассуждая теперь, как и в случае б), получаем, что функция $r(z)$ непрерывна в точке $z = 1$ и $-1 < r(1) < 1$.

Теорема доказана.

Замечание. При условии $M_r < \infty (r > 1)$ оценки (9) заменяются оценками

$$|n|^{r-1} F_j^{\pm}(n) \in l^1(0, \pm\infty),\ |n|^r \left| F_1^{\pm}(n + 2p) - F_2^{\pm}(n) \right| \in l^1(0, \pm\infty),\ j = 1,2;\ p = 0,1.$$

Тогда из схемы доказательства теоремы следует, что функция $r(z)$ имеет на единичной окружности непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.А Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, «Наук. думка», 1977.
2. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах //Журн. экспериментальной и теоретической физики, 1974, т.67, №2, с.543-555.
3. Ханмамедов Аг.Х. О быстроубывающем решении задачи Коши для цепочки Тоды //Теоретическая и математическая физика, 2005, т.142, №1, с.3-10.
4. Khanmamedov Ag.Kh. On the theory of inverse scattering problems for a system of a difference equations// Trans. of Acad. of Science of Azerb.,ser.of phys.-tect. and math. sciences, 2000, v.XX, №4, p. p.132-145.
5. Гусейнов И.М. О непрерывности коэффициента отражения одномерного уравнения Шредингера //Дифференц. уравнения, 1985, т.21, №11, с.1993-1995.
6. Ханмамедов Аг.Х. Операторы преобразования для возмущенного разностного уравнения Хилла и их одно приложение //Сибирский матем. журн., 2003, т.44, №4, с.926-937.

DAĞILAN POTENSİALA MALİK OLAN DİSKRET ŞREDİNQER OPERATORUNUN ƏKSOLUNMA ƏMSALININ KƏSİLMƏZLİYİ

Aq.X.XANMƏMMƏDOV

ANNOTASİYA

Potensial dağılan olduğu halda diskret Şredinqer operatoruna baxılmışdır. Əksolunma əmsalının kəsilməzliyi isbat olunmuşdur.

CONTINUITY OF A REFLECTION COEFFICIENT OF DISCRETE SCHREDINGER OPERATOR WITH NON-STABILIZIED POTENTIAL

Ag.Kh.KHANMAMEDOV

ABSTRACT

We consider the discrete Schredinger operator having non-stabilized potential. The continuity of a reflection coefficient of this operator is proved.